 ISBN 978-602-61597-0-0

Kendali Optimal pada Inventori dengan Model Produksi Stokastik

Pardi Affandi[1], Faisal[2], Nur Salam [3]

[1,2,3] Departemen of Mathematics, Fakulty of Mathematics and Natural Sciences Lambung Mangkurat University
Jl. A. Yani Km 35,8 South Kalimantan, Indonesia. Tel/HP/ 081349499131 Fax.+62-511-4663375,
email: p_affandi@unlam.ac.id

Abstrak

Banyak permasalahan yang melibatkan teori sistem dan teori kontrol serta aplikasinya. Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol ke dalam masalah inventori adalah Sprzeuzkouiski (1967), Hwang, Fan dan Erickson (1967), Pekelman (1974), Bensoussan, Affandi P. (2011). Masalah klasik dalam masalah inventori adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Masalah ini salah satunya dapat dimodelkan dan diselesaikan dengan menggunakan teknik kontrol optimal.

Model matematika dari masalah permintaan inventori dapat bersifat deterministik dan juga probabilistik atau disebut stokastik. Dalam penelitian ini akan dibahas bagaimana model inventori dengan produksi stokastik serta bagaimana menyelesaikan bentuk model inventori tersebut menggunakan teknik optimal kontrol.

Kata Kunci: masalah inventori, produksi stokastik, kontrol optimal.

1. Pendahuluan

Masalah inventori termasuk salah satu masalah yang berkembang secara pesat. Masalah yang timbul sangat kompleks, diantaranya masalah produksi yang didalamnya mengandung ketidakpastian, yang jumlahnya sangat berpengaruh terhadap inventori yang tersedia. Perusahaan melakukan produksi besar menginginkan cukup pasokan untuk memenuhi permintaan pelanggan, tapi produksi terlalu banyak kenaikan dapat meningkatkan biaya dan risiko kerugian melalui terjadi keusangan atau kerusakan barang. Produksi terlalu kecil meningkatkan risiko kehilangan penjualan dan akibatnya kehilangan pelanggan. Dibutuhkan metode yang tepat mengatur jumlah barang yang diproduksi dalam tingkat yang menyeimbangkan risiko permintaan dan risiko kekurangan. Dalam penelitian ini dibahas model matematika dari masalah inventori Inventori dengan Model Produksi Stokastik serta bagaimana menyelesaikan bentuk model inventori tersebut menggunakan teknik optimal kontrol.

2. Tinjauan Pustaka

Unsur ketidakpastian sangat berperan dalam model inventori. Perusahaan menginginkan cukup pasokan untuk memenuhi permintaan pelanggan, tapi produksi terlalu banyak kenaikan dapat meningkatkan biaya dan risiko kerugian melalui terjadi keusangan atau kerusakan barang. Produksi terlalu kecil meningkatkan risiko kehilangan penjualan dan akibatnya kehilangan pelanggan. Manajer sumber daya harus mengatur jumlah barang yang disimpan dalam tingkat yang menyeimbangkan risiko permintaan dan risiko kekurangan. Manajer operasi harus dapat mengatur jadwal produksi induk mengingat sifat tepat dari perkiraan masa depan tuntutan dan lead time dari proses manufaktur. Situasi ini umum, dan jawaban yang didapatkan dari analisis deterministik sangat sering tidak memuaskan.

Sehingga model produksi bersifat stokastik akan memberikan jawaban yang lebih sesuai untuk diharapkan. Sehinga dalam bab ini memberikan perkembangan baru dalam studi stokastik model persediaan produksi. Kontrol optimal stokastik dari perencanaan model produksi barang akan disajikan dalam model berikut. Solusi dari model ini akan dibentuk melalui dari persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman dengan fungsi nilai tertentu yang diketahui. Asumsi dari model ini adalah untuk menggeneralisasi dari bentukan Sethi dan Thomson (2000). Harapan tingkat produksi yang optimal, tingkat persediaan yang optimal dan Fungsi nilai saat optimal diperoleh sebagai fungsi waktu. Sensitivitas analisis model ini dengan parameter sistem, yang dibagi dan disajikan ke dalam kategori parameter moneter dan nonmoneter.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Matematika

Estimasi keadaan optimal untuk sistem linear dengan noise dan pengukuran noise. Juga akan didefinisikan proses white noise untuk memperoleh filter Kalman-Bucy untuk sistem waktu kontinu. Selanjutnya akan diperkenalkan kemungkinan mengendalikan sistem yang diatur oleh Ito dalam persamaan diferensial stokastik. Dengan kata lain, akan diperkenalkan kontrol variabel menjadi versi nonlinear dari persamaan sebelumnya. Ini menghasilkan rumusan masalah kontrol optimal stokastik. Perlu dicatat bahwa untuk masalah seperti itu, prinsip pemisahan tidak berlaku secara umum. Oleh karena itu, untuk mempermudah dalam perawatan, sering diasumsikan bahwa state variabel dapat diamati, dalam arti bahwa state variabel dapat langsung diukur. Selanjutnya, sebagian besar literatur tentang masalah ini menggunakan pemrograman dinamis atau kerangka Hamilton-Jacobi-Bellman untuk menentukan prinsip maksimum stokastik. Berikut akan diberikan rumusan masalah kontrol optimal stokastik dengan menyediakan, pengembangan informal yang singkat dari bentuk penyelesaian konsep Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) untuk solusi persamaan masalah tersebut.

3.2 Optimal Control Inventori Produksi Stokastik

Berikut ini akan diperkenalkan notasi dan simbol yang digunakan dalam model inventori produksi stokastik. Dalam penelitian ini digunakan generalisasi model yang diperoleh Sethi dan Thompson (2000). Asumsi yang digunakan dengan menganggap pabrik menghasilkan homogen baik tunggal dan memiliki produk yang jadi dalam gudang. Untuk menggambarkan keadaan dari model berikut di definisikan parameter dan variabel dalam sistem, adalah sebagai berikut:

- Xt : tingkat persediaan pada waktu t,
- Ut : tingkat produksi pada waktu t,
- S (t) : tingkat permintaan pada waktu t,
- T : panjang periode perencanaan,
- X : tingkat tujuan persediaan pabrik,
- û : tingkat tujuan produksi pabrik,
- x_0 : tingkat persediaan awal,
- h : koefisien biaya penyimpanan persediaan,
- c : koefisien biaya produksi,
- B : nilai sisa per unit persediaan saat T,
- z_t : proses Wiener standar,
- σ : koefisien difusi.

Tingkat tujuan persediaan pabrik X adalah tingkat safety stock bahwa perusahaan ingin untuk menjaga jumlah inventori yang aman dalam penyimpanan. Juga, produksi pabrik tingkat tujuan U adalah tingkat yang paling efisien yang diinginkan untuk menjalankan pabrik. Dengan menggunakan notasi di atas, dapat digambarkan kondisi model. Persamaan

$$X(t) = u(t) - S(t),\ x(0) = x_0, \qquad (3.1)$$

pertama adalah persamaan aliran model, itu adalah:

yang menyatakan bahwa tingkat persediaan pada waktu t meningkat dengan produksi dan semakin berkurang dengan adanya permintaan. Kemudian persamaan (3.1) dapat digeneralisasi menjadi model stokastik. Dengan membuat asumsi tingkat inventori x_t mengikuti persamaan Ito Differensial Stokastik sebagai berikut :

Dengan menggunakan proses dz_t dapat dinyatakan sebagai w (t) dt, dimana w (t) adalah sebagai proses white noise. Proses ini dapat diartikan sebagai penjualan pengembalian atau pembusukan persediaan yang acak di alam. Dalam model ini tidak ada pembatasan laju produksi menjadi negatif. Ini berarti bahwa diizinkan pembuangan (u_t < 0). Hal ini menyatakan kondisi di mana sebuah pembuangan tidak diperlukan. Selanjutnya tingkat persediaan diperbolehkan untuk menjadi negatif.

Solusi dari masalah ini akan dilakukan dengan menggunakan dimodifikasi Hamilton-Jacobi yang Prinsip yang dihasilkan oleh persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman disebut bahwa puas dengan fungsi nilai tertentu. Sekarang, masalahnya adalah untuk meminimalkan total biaya yang diharapkan yang ditentukan oleh integral fungsional berikut:

$$J(u) = E\left\{\int_0^T \left[c(U_t - \bar{u})^2 + h(X_t - \bar{x})^2\right] dt + BX_T\right\}. \qquad (3.3)$$

Asumsikan bahwa V(x, t) menunjukkan nilai minimum total biaya yang diharapkan dari t menuju T dengan X_t=x menggunakan kebijakan optimal dari t ke T. Kemudian fungsi diberikan oleh:

$$V(x,t) = \min_{U_t} E\left\{\int_t^T \left[c(U_t - \bar{u})^2 + h(X_t - \bar{x})^2\right] dt + BX_T\right\}. \qquad (3.4)$$

Oleh karena itu nilai fungsi V (x, t) harus memenuhi Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) persamaan

$$0 = \max_u \left\{-c(u-\bar{u})^2 - h(x-\bar{x})^2 + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(u - S) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\}, \qquad (3.5)$$

dengan kondisi batas V(*x*,*t*) = *Bx* . (3.6)

Sekarang untuk memaksimalkan ekspresi sehubungan dengan u dengan mengambil turunannya sehubungan dengan u dan pengaturan ke nol. Prosedur hasil ini

$$\frac{\partial V}{\partial x} - 2c(u - \bar{u}) = 0. \qquad (3.7)$$

Oleh karena itu, tingkat produksi optimal yang meminimalkan total biaya dapat dinyatakan sebagai fungsi dari fungsi dengan ditentukan nilai persamaan yang diketahui pada saat dalam bentuk:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{u}. \qquad (3.8)$$

Dengan substitusi (3.8) ke (3.5) akan diperoleh persamaan

$$dX_t = (U_t - S)dt + \sigma dz_t,\quad X_0 = x_0, \qquad (3.2)$$

$$0 = -\left[\frac{1}{4c}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + h(x-\bar{x})^2\right] + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\left[\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \bar{u} - S(t)\right] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \tag{3.9}$$

Ini adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang harus dipenuhi oleh nilai fungsi V(x,t) dengan kondisi batas (3.6). Penting untuk dicatat bahwa jika tingkat produksi menjadi nonnegatif, maka tingkat produksi yang optimal akan berubah menjadi

$$u(x,t) = \max\left[0, \frac{1}{2c}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{u}\right]. \tag{3.10}$$

3.3 Solusi Model Hamilton-Jacobi-Bellman Equation

Dalam bagian ini kita akan mendapatkan solusi dari perencanaan masalah produksi stokastik dengan tingkat permintaan yang berbeda. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier (3.9), mari gunakan asumsi bahwa yang solusi mengambil bentuk berikut

$$V(x,t) = Q(t)x^2 + R(t)x + M(t). \tag{3.11}$$

Kemudian

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Qx + R, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2Q, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M}, \tag{3.14}$$

di mana titik menunjukkan diferensiasi terhadap waktu. Dengan melakukan penggantian dari persamaan (3.9) ke persamaan (3.11) akan memberikan hasil

$$\frac{1}{4c}[2Qx+R]^2 - h\left[x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2\right] + \left[\dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M}\right] + [2Qx+R](\bar{u}-S) + \sigma^2 Q = 0. \tag{3.15}$$

Persamaan (3.15) harus berlaku untuk setiap nilai x, kita mendapatkan sistem berikut persamaan diferensial biasa nonlinear :

$$c\dot{Q} = ch - Q^2, \tag{3.16}$$

$$c\dot{R} + QR = -2ch\bar{x} - 2cQ(\bar{u} - S), \tag{3.17}$$

$$4c\dot{M} = 4ch\bar{x}^2 - R^2 - 4c(\bar{u} - S)R - 4c\sigma^2 Q. \tag{3.18}$$

Selanjutnya, akan diselesaikan sistem nonlinear ini untuk kasus yang berbeda dari tingkat permintaan dengan

$$Q(T) = 0,\ R(T) = B,\ M(T) = 0. \tag{3.19}$$

dengan mengubah waktu t menjadi:

$$\tau = e^2\sqrt{h/c}\,(t-T).$$

Kemudian, akan diperoleh nilai

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{h}{c}}\tau\frac{\partial}{\partial \tau},$$

dan waktu tertentu akan diperoleh dua kasus umum yang berbeda untuk tingkat permintaan

$$t = 0 \Rightarrow \tau = e^{-2\sqrt{\frac{h}{c}}T},$$

$$t = T \Rightarrow \tau = 1,$$

Berarti akan diperoleh nilai

$$\tau \in \left[e^{-2\sqrt{\frac{h}{c}}T}, 1\right]. \tag{3.21}$$

Untuk dapat menyelesaikan persamaan (3.16) dapat digunakan $c\dot{Q}/(ch - Q^2)$

Sehingga akan diperoleh

$$Q(\tau) = \frac{\sqrt{ch}(\tau - 1)}{\tau + 1}. \tag{3.22}$$

Berikutnya akan dibahas dua kasus general untuk menentukan permintaan rata-rata.

Kasus pertama adalah kasus yang di mana tingkat permintaan konstan yang S (t) = S_0 = const. Dalam hal ini tingkat produksi yang optimal diberikan oleh:

$$u(x,t) = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\sqrt{ch}(\tau-1)}{\tau+1}\right)x - c(\bar{u} - S_0) + [B + 2c(\bar{u} - S_0)]\frac{\sqrt{\tau}}{\tau+1} - \bar{x}\sqrt{ch}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)\right] + \bar{u}. \tag{3.23}$$

Fungsi R(τ) and M(τ) akan diperoleh dengan :

$$R(\tau) = -2c(\bar{u} - S_0) + 2[B + 2c(\bar{u} - S_0)]\frac{\sqrt{\tau}}{\tau+1} - 2\bar{x}\sqrt{ch}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right), \tag{3.24}$$

$$M(\tau) = \int\left\{\frac{1}{2\tau}\left[\sqrt{ch}\bar{x}^2 - \frac{R^2}{4\sqrt{ch}} - \sqrt{\frac{c}{h}}(\bar{u} - S_0)R - \sqrt{\frac{c}{h}}\sigma^2 Q\right]\right\}d\tau + M_0. \tag{3.25}$$

Dalam rangka untuk mencari tingkat persediaan yang diharapkan dapat diselesaikan persamaan state (3.2) dengan mengambil rata-rata sehubungan dengan keadaan variabel x dan menggantikannya dengan optimal tingkat produksi dari (3.23) untuk mendapatkan:

$$\dot{E}(x) - \frac{Q}{c}E(x) = \frac{1}{c}\left\{[B + 2c(\bar{u} - S_0)]\frac{\sqrt{\tau}}{\tau+1} - \bar{x}\sqrt{ch}\frac{\tau-1}{\tau+1}\right\}.$$

$$E(x) = \bar{x} - \frac{B + 2(u - S_0)}{2\sqrt{ch}\sqrt{\tau}} + \left[x_0 - \bar{x} + \frac{B + 2(u - S_0)}{2\sqrt{ch}\sqrt{\tau_0}}\right]\frac{\sqrt{\tau_0}}{1+\tau_0}\left(\frac{\tau+1}{\sqrt{\tau}}\right). \tag{3.26}$$

Beberapa kasus khusus dapat diperoleh dari ini, misalnya ketika tingkat permintaan konstan dan sama dengan U tingkat tujuan produksi. Dalam hal ini Tingkat persediaan yang diharapkan.

4. Kesimpulan dan Saran

Dari pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan

1. Pengaturan produksi yang tepat sangat penting agar dapat mengatur jumlah barang yang diproduksi dalam tingkat yang menyeimbangkan risiko permintaan dan risiko kekurangan.
2. Kendali Optimal dapat digunakan untuk menyelesaikan model Inventori dengan Model Produksi Stokastik.

Bagi para peneliti selanjutnya, disarankan agar meneliti aplikasi Teori Kendali ke bidang operasi riset yang lain. Model-model inventori baik inventori bahan baku ataupun inventori produksi, deterministi dan stokastik dapat diselesaikan dengan teori kontrol.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., 1988. *Calculus.* Drexel University, John Wiley & Sons, New York.

[2] Affandi, P. S Salmah, 2011. *Kendali Optimal system pergudangan dengan produksiyang mengalami kemerosotan*. Tesis, Yogyakarta.

[3] Affandi, P. F Faisal Y Yulida, *Penerapan Teori Kendali pada Masalah Inventori*. 2012 , Jurnal Matematika Murni dan Terapan vol 6 No 1 Juni 2016.

[4] Affandi, P. Dewi A, Nur Salam, *Penerapan Teori Kendali pada Masalah Program Dinamik*. 2012 , Jurnal Matematika Murni dan Terapan vol 6 No 2 Tahun 2016.

[5] Affandi, P. Nur Salam, Faisal (2015).*Optimal Inventory Control System With Stochastic Demand*. Ethar , Indonesia. 2016(3), 302 – 313.

[6]Astrom, J. K. (1970). *Introduction to stochastic control theory, Academic Press*,New York.

[7] Bensoussan, A., Sethi, S. P., Vickson, R. G. and Derzko, N. (1984). Stochastic production planning with production constraints, SIAM J. Control and Optimization Vol. 22, No.6, 920-935.

[8] Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control* .John Wiley & Sons. New York.

[9]Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design*, Madison Avenue New York.

[10]Danese,A.E. 1965. *Advanced Calculus an introduction to Applied Mathematics.*

[11]Davis, M. H. (1977). Linear estimation and stochastic control, John Wiley and Sons, New York.

[12]Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.

[13]El-Gohary, A. (2001). Optimal control of the gential herpers epidemic, Chaos, Solutions and Fractals Vol. 12, 1817-1822.

[14]El-Gohary, A. and Bukhari, F. (2003). Optimal control of stochastic preyperdator models, Applied Mathematics and Computations, Vol. 146, 11, 403-415.

[15]El-Gohary, A., Tadj, L. and Al-Rahmah, A. (2006). Optimal control of a stochastic production planning model with different demand rates, International Journal of Applied Mathematics, (Accepted).

[16] Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation*. The University of Texas at Arlington. New York.

[17]Goyal, S. K. and Giri, B. C. (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory, European Journal of Operational Research, Vol. 134, 1-16.

[18]Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction*.Prentice Hall International, Inc.Philippines.

[19] Murray R. Spiegel Statistic Schaum, 2 edition Renselaer Polytechnic Institut Hartford.

[20] Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1 . Delft University of Technlogy. Netherlands.

[21]Parlar,M. (1985). A stochastic production planning model with a dynamic chance constraint, European Journal of Operational Research, Vol. 20, 255-260.

[22]Perkins, J. R. and Kumar, P. R. (1994). Optimal control of pull manufacturing systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 40:12, 2040-2051.

[23]Presman, L. E. Sethi, S. P., Zhang, H. and Bisi, A. (2001). Average cost optimal policy for a stochastic two-machine flow shop with limited work-in-process, Nonlinear Analysis, Vol. 47, 5671-5678.

[24]Sagirow, P. (1972). Stochastic methods in the dynamics of satellites, Springer Verlag, New York.

[25]Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation*. 3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

[26] Sethi, S.P. and Thompson, G.L. (2000). Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[27]*S*hety S.P and Thompson G.L 1985. *Optimal Control Theory : Applied to Management science and economics*. 2 editions.

[28] Sethi, S. P. (1973a). Optimal control of Vidale-Wolfe advertising models, Operations Research, Vol. 21, 998-1013.