ISBN. 978 – 602 – 6483 – 81 – 2

KENDALI OPTIMAL PADA INVENTORI MULTI-ITEM YANG MENGALAMI KEMEROSOTAN

Pardi Affandi
FMIPA Matematika ULM
e-mail: p_affandi@ulm.ac.id

***Abstrak*–**Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai permasalahan yang melibatkan Teori Sistem, kendali optimal dan beberapa aplikasinya. Diantaranya adalah masalah sistem inventori, masalah yang dihadapi adalah memutuskan berapa banyak keterlibatan disetiap periode waktu untuk memenuhi permintaan dari suatu produk. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kontrol optimal matematika. Tulisan ini membahas masalah kontrol optimal inventori dengan model persediaan pada beberapa jenis item yang mengalami kemerosotan. Karena ternyata dalam dunia real masalah yang dihadapi cenderung penyimpanan inventori terdiri dari beberapa jenis barang, mulai dari model yang muncul hingga bentuk model dua-item. Model akan diselesaiakan dengan kontrol optimal dengan menggunakan prinsip Pontryagin. Sehingga akan didapatkan cara bagaimana menentukan biaya produksi yang optimal dan tingkat persediaan yang optimal serta jumlah Total biaya termasuk jumlah dari biaya penyelenggaraan persediaan pada dua-item.

Kata kunci: Inventori Multi-Item, Kendali Optimal, Maksimum Pontryagin.

I. PENDAHULUAN

Teknik kendali optimal merupakan perpanjangan dari kalkulus variasi, salah satu metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Metode ini sebagian besar diilhami oleh karya Lev Pontryagin dan rekan-rekannya di Uni Soviet dan Richard Bellman di Amerika Serikat. Salah satu karya besar Lev Pontryagin adalah Pontragyn’S maximum principle atau prinsip maksimum Pontryagin.

Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol kedalam produksi dan masalah inventori adalah Sethi S.P dan Thompson G.L [4] membahas model produksi inventori dan solusinya sedangkan Yacine Benhadid, Lotfi Tadz dan Messaoud Bounkhel (dalam Affandi [7]) membahas model dalam kondisi permintaan dinamis dan inventori tersedia sepanjang waktu, fokus permasalahannya sistem inventori produksi yang berbentuk nonlinear dan biaya produksi diperlakukan sebagai fungsi secara umum masing-masing dari tingkat persediaan dan tingkat produksi. Dilanjutkan dengan Model Inventori Multi-item El-Gohary [8].

Kajian sistem inventori terkait tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi dalam tulisan ini mengacu pada Affandi, P., [1], yang menjamin kondisi pokok dari sistem inventori memiliki solusi optimal sehingga memenuhi kondisi Hamiltonian yang teorinya diambil dari D.N Burges, kemudian solusinya dihubungkan dengan prinsip Optimal Kontrol dari Affandi, P., [5] sedangkan persamaan state Menurut Hesaam K. Alfares [9] (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan. Beberapa penjelasan terkait dengan Persamaan Diferensial Linier nonhomogen dan solusinya mengacu pada Shepley L Ross [13], Sistem Persamaan Diferensial yaitu karangan Ogata K [12], dan inventori controlnya bersumber dari Nador, E [14]. Fungsinya terjamin konveksitasnya teori bersumber dari Ogata K [12] sehingga membantu menjamin kondisi optimal fungsinya.

Banyak pembahasan model inventori berkaitan dengan model inventori tunggal. Meskipun dalam kenyataannya model seperti ini agak jarang terjadi. Model inventori multi-item lebih realistis daripada model inventori tunggal. Sehingga pada tulisan ini berkaitan dengan model inventori dengan dua persediaan barang. Tujuannya adalah memaksimalkan total laba rata-rata atau optimal dari nilai total biaya rata-rata selama siklus tertentu dengan terlebih dahulu dibentuk model persamaan diferensialnya dengan melibatkan Hamiltonian dan maksimum pontryagin.

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur. Metodologi yang digunakan adalah mengumpulkan bahan tulisan dari buku-buku dan jurnal maupun makalah yang membahas konsep inventori dengan khususnya memberikan gambaran tentang bagaimana aplikasi kontrol optimal menentukan tarif produksi yang optimaldan tingkat persediaan yang optimal serta jumlah seluruh biaya termasuk jumlah dari biaya penyelenggaraan persediaan serta menentukan solusi multi-itemyang mengalami kemerosotan dengan menggunakan teknik optimal kontrol.

Adapun prosedur-prosedur yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menjelaskan konsep inventori produksi singel-items
2. Menjelaskan konsep inventori produksi dua -items
3. Menyelesaikan masalah inventori dengan menggunakan Teori Kontrol.
4. Menarik kesimpulan dari hasil pembahasan.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Banyak peruasahaan manufaktur yang menggunakan sistem inventori produksi yang dilakukan untuk mengatur perubahan permintaan konsumen pada produk barang jadi. Sehingga permintaan konsumen dan pelanggan dapat terpenuhi, tapi barang produksinya juga tidak mengalami kemerosotan. Kemerosotan dalam inventori produksi dapat terjadi disebabkan adanya pembusukan atau kerusakan pada barang inventori produksi untuk jangka waktu tertentu. Biasanya inventori produksi yang sering mengalami kemerosotan ini adalah produksi makanan atau minumuan. Karena makanan atau minuman yang terlalu lama berada dalam pergudangan maka efeknya adalah bisa mengalami pembusukan atau kerusakan, hal inilah yang dinamakan mengalami kemerosotan. Sehingga perusahaan harus mengeluarkan biaya kemerosotan.

Pada bagian selanjutnya akan diperkenalkan notasi-notasi yang digunakan:

$I_i(t)$	: tingkat inventori pada waktu t,
$P_i(t)$	: rata-rata produksi pada waktu t,
$D(I_1, I_2, t)$	: rata-rata permintaan pada tingkat inventori (I_1, I_2) waktu t,
$\theta(t, I(t))$	: rata-rata kemerosotan pada waktu t sesuai dengan I(t),
h_{ii}	: rata-rata biaya penyimpanan sesuai dengan I(t),
K_{ii}	: rata-rata biaya produksi sesuai dengan P(t),
T	: panjang rencana dalam waktu tertentu,
ρ	: konstan non negatif rata-rata discount,
Ii_0	: tingkat inventori awal,
$\tilde{\theta}$	: tujuan rata-rata kemerosotan,
$\tilde{I}_i$	: tingkat inventori tujuan,
$\tilde{P}_i$	: rata-rata produksi tujuan,
c_{ii}	: biaya positif produksi unit produksi

Asumsimodel yang digunakan adalahtingkat permintaan merupakan fungsi dari tingkat persediaan, kekurangan dalam tingkat persediaan tidak memungkinkan, inventori melibatkan dua item tetapi satu tempat penjualan dan perubahan biaya penyimpanan adalah fungsi dari tingkat persediaan. Seluruh fungsi yang digunakan juga non negatif, kontinu dan differensiabel. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan D, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya P, dan pemerosotan yang terjadi menggunakan rata-rata θ, mengikuti tingkat inventori I(t), berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares [9] (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi [0, t_1]. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh inventori diferential equation (IDE) adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} I_i(t) = f_i\big(t, I(t), P(t)\big) \tag{3.1}$$

Model tersebut merepresentasikan masalah kontrol optimal dengan sebuah *state variable* yaitu tingkat inventori dan variable kontrol yaitu rata-rata tingkat produksi. Masalahnya diasosiasikan meminimumkan

ISBN. 978 – 602 – 6483 – 81 – 2

sebuah fungsi objektif yang kita inginkan, hingga biaya yang dikeluarkan seoptimal mungkin. Berarti akan diminimumkan :

$$\min_{P(t)\geq 0} 2J(P,I) = \sum_{i=1}^{2} \int_0^T F\big(t, I(t), P(t)\big)dt \tag{3.2}$$

subjek dari persamaan state (3.1) adalah

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = \left\langle \frac{1}{2}\left[\mathrm{h}_{ii}\big(\mathrm{I}_i(\mathrm{t})\big) - \tilde{\mathrm{I}}_i(\mathrm{t})\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_i\big(\mathrm{P(t)}\big) - \mathrm{K}_i(\widetilde{\mathrm{P}})\right]^2 + \frac{\mathrm{c}_{ii}}{2}\left[\theta\big(\mathrm{t}, \mathrm{I(t)}\big) - \tilde{\theta}\right]^2 \right\rangle \tag{3.3}$$

dengan nilai dari

$$\tilde{\mathrm{I}}_1(\mathrm{t}) = -\mathrm{I}_1(\mathrm{t})\big(\theta_1 + a_{12}\mathrm{I}_1(t) + a_{11}\mathrm{I}_1(t) - D_1(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, t) + \mathrm{P}_1(\mathrm{t})\big)$$

$$\tilde{\mathrm{I}}_2(\mathrm{t}) = -\mathrm{I}_2(\mathrm{t})\big(\theta_2 + a_{21}\mathrm{I}_1(t) + a_{22}\mathrm{I}_2(t) - D_2(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, t) + \mathrm{P}_2(\mathrm{t})\big) \tag{3.4}$$

dan

$$\mathrm{I}_i(\mathrm{t}) \geq 0, \quad \mathrm{P}_i(\mathrm{t}) \geq 0 \; serta \;\; t \in [0, T], \;\; \mathrm{h}_{ii} > 0, \;\; \mathrm{c}_{ii} > 0, \;\; i = 1{,}2 \tag{3.5}$$

Dengan menggunakan persamaan state (3.11) dan menyederhanakan persamaan sehingga diperoleh

$$2\tilde{\mathrm{I}}_0(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{h}_{11}}{2}\Big((\mathrm{I}_1 - \tilde{\mathrm{I}}_1)^2 + \frac{c_{11}}{2}(\mathrm{P}_1 - \widetilde{\mathrm{P}}_2)^2 + \frac{h_{22}}{2}(\mathrm{I}_2 - \tilde{\mathrm{I}}_2)^2 + \frac{c_{22}}{2}(\mathrm{P}_2 - \widetilde{\mathrm{P}}_2)^2 + \mathrm{c}_{12}\left[\theta\big(\mathrm{t}, \mathrm{I(t)}\big) - \tilde{\theta}\right]^2\Big) \tag{3.6}$$

Alat utama untuk menyelesaikan masalah ($\mathcal{P}$) pencariannya melibatkan kondisi optimal bentuk pontryagin maksimum seperti yang terdapat dalam pembahasan sebelumnya. Kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi *Hamiltonian*. Dengan menggunakan nilai awal dan syarat batas nilainya masing-masing $\mathrm{I}_0(0) = 0$ dan $\mathrm{I}_0(\mathrm{t}) = \mathrm{J}$.

Selain variabel state juga terdapat variabel costate $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ yang berkoresponden dengan $(\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2)$ pada persamaan state maka persamaan costate yang diperoleh adalah bernilai optimal pada langkah sebagai berikut:

$$H = \lambda_0\mathrm{I}_0 + \lambda_1\mathrm{I}_1 + \lambda_2\mathrm{I}_2 \tag{3.7}$$

Selain mendapatkan persamaan co-state dan pengali Lagrange terkait dengan batasan (3.5) juga akan dibentuk fungsi Lagrange yaitu:

$$L = \mathrm{H} + \mu_1(\mathrm{t})\mathrm{I}_1 + \mu_2(\mathrm{t})\mathrm{I}_2 + \mu_3(\mathrm{t})\mathrm{P}_1 + \mu_4(\mathrm{t})\mathrm{P}_2 \tag{3.8}$$

Dengan $\mu_1(\mathrm{t}), \mu_2(\mathrm{t}), \mu_3(\mathrm{t})$ dan $\mu_4(\mathrm{t})$ adalah pengali lagranga dan nilai dari

$$\mu_1(\mathrm{t}) \geq 0, \quad \mu_2(\mathrm{t}) \geq 0, \quad \mu_3(\mathrm{t}) \geq 0 \;\; \text{dan} \; \mu_4(\mathrm{t}) \geq 0$$

$$\mu_1\mathrm{I}_1(\mathrm{t}) = 0, \;\; \mu_2\mathrm{I}_2(\mathrm{t}) = 0, \;\; \mu_3\mathrm{P}_1(\mathrm{t}) = 0 \; \text{dan} \; \mu_4\mathrm{P}_1(\mathrm{t}) = 0 \;\; , \tag{3.9}$$

Dari (3.8) diselesaikan dapat diperoleh nilai dari persamaan co-state adalah sebagai berikut

$$\tilde{\lambda}_0(\mathrm{t}) = \frac{-\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{I}_0} = 0, \;\; \tilde{\lambda}_1(\mathrm{t}) = \frac{-\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{I}_1} \; , \; \tilde{\lambda}_2(\mathrm{t}) = \frac{-\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{I}_2} \tag{3.10}$$

Persamaan pertama dari sistem (3.10) menunjukkan bahwa variabel co-state λ_0 (t) adalah bernilai konstan dan konsep yang menggunakan prinsip maksimum Pontryagin mensyaratkan bahwa konstanta ini harus bernilai negatif. Sehingga dapat dipilih bahwa nilai dari $\lambda_0(\mathrm{t}) = -1$. Selanjutnya dengan melakukan substitusi dari (3.6), (3.7), (3.9) dan (3.10) dan (3.8) akan dapat menulis L menjadi bentuk

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = \frac{-1}{4}\Big[&\mathrm{h}_{11}\Big((\mathrm{I}_1 - \tilde{\mathrm{I}}_1)^2 + \mathrm{c}_{11}(\mathrm{P}_1 - \widetilde{\mathrm{P}}_2)^2 + \mathrm{h}_{22}(\mathrm{I}_2 - \tilde{\mathrm{I}}_2)^2 + \mathrm{c}_{22}(\mathrm{P}_2 - \widetilde{\mathrm{P}}_2)^2 + 2\mathrm{h}_{12}\left[\theta\big(\mathrm{t}, \mathrm{I(t)}\big) - \tilde{\theta}\right]^2\Big)\Big] + \\ &\lambda_1(-\mathrm{I}_1(\theta_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{I}_2 + \mathrm{a}_{11}\mathrm{I}_1) - \mathrm{D}_1 + \mathrm{P}_1) + \lambda_2(-\mathrm{I}_2(\theta_2 + \mathrm{a}_{21}\mathrm{I}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{I}_2) - \mathrm{D}_2 + \mathrm{P}_2) + \mu_1\mathrm{I}_1 + \\ &\mu_2\mathrm{I}_2 + \mu_3\mathrm{P}_1 + \mu_4\mathrm{P}_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Dari kondisi syarat (3.5) dan (3.9) akan diperoleh nilai dari :

$$\mu_1(\mathrm{t}) = 0, \mu_2(\mathrm{t}) = 0, \mu_3(\mathrm{t}) = 0 \; \text{dan} \; \mu_4(\mathrm{t}) = 0 \tag{3.12}$$

Selanjutnya dengan melakukan subsitusi (3.12), (3.11) ke persamaan (3.10) akan diperoleh nilai

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \lambda_1 \left(\frac{\partial D_1}{\partial I_1} + \theta_1 + a_{12}I_2 + 2a_{11}I_1\right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial D_2}{\partial I_1} + \theta_2 + a_{21}I_2 + h_{11}(I_1 - \tilde{I}_1) + h_{12}(I_2 - \tilde{I}_2)\right)$$

$$\tilde{\lambda}_1(t) = \lambda_2 \left(\frac{\partial D_2}{\partial I_2} + \theta_2 + a_{21}I_1 + 2a_{22}I_2\right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial D_1}{\partial I_2} + \theta_2 + a_{12}I_1 + h_{22}(I_2 - \tilde{I}_2) + h_{12}(I_1 - \tilde{I}_1)\right) \quad (3.13)$$

Dengan menggunakan syarat batas $\lambda_i(t) = 0, \quad i = 1,2$

Untuk mendapatkan variabel kontrol P_i (t) kita akan membedakan fungsi Lagrange (3.11) dengan menggunakan nilai P_i (i = 1, 2) bentuk $\frac{-\partial L}{\partial u_i} = 0$, dengan nilai $i = 1,2$ (3.14)

Akan diperoleh nilai dari

$$P_i(t) = \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}}, \quad u_i(t) \epsilon\, \Omega_i(t) \;\; t \,\epsilon\, (0, T) \text{ nilai } i = 1,2 \quad (3.15)$$

Dimana $\Omega_i(t) = [0, P_{imax}(t)]$, $P_{imax}(t)(i = 1,2)$ adalah kemungkinan biaya produksi maksimum, himpunan semua kemungkinan tingkat produksi yang ditentukan oleh kendala permasalahan pada nilai variabel kontrol pada saat t.

Dengan menggunakan syarat batas $\lambda_i(t) = 0, \quad i = 1,2$ akan dapat diperoleh nilai dari

$$P_i(t) = \widetilde{P}_i \text{ nilai } i = 1,2 \quad (3.16)$$

Untuk memastikan nilai dari $u_i(t) \geq 0$ maka $P_i(t) \geq \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}}, i = 1,2$. Dari persamaan (3.5) dan (3.15) akan dapat ditentukan tingkat produksi optimal nilainya adalah

$$P^*{}_i(t) = \max\left(0, \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}}\right) \text{ nilai } i = 1,2 \quad (3.17)$$

Dari persamaan (3.17) akan dapat diperoleh nilai

$$P^*{}_i(t) = \begin{cases} 0, & \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}} < 0 \\ \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}}, & 0 \leq \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}} \leq P_{imax}(t) \\ P_{imax}(t), & \widetilde{P}_i + \frac{\lambda_i(t)}{c_{ii}} > P_{imax}(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

Secara kenyataan, dapat dianggap bahwa nilai dari $\widetilde{P}_i \geq I_{i0} > 0$ (i = 1, 2). Jadi, produksi tingkat sasaran P_i harus cukup besar dan nilai awal I_{i0} kecil. Sehingga (3.17) selalu memberikan nilai produksi yang tidak negatif.

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Masalah kontrol optimal model inventori yang mengalami kemerosotan dalam dunia nyata lebih sering dalam bentuk multi-item. Dengan kondisi inventori tidak mengalami kekurangan dan model inventori berbentuk waktu-kontinyu kondisi ini akan dapat menghasilkan Tingkat persediaan optimal dan tingkat produksi dapat ditentukan.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Affandi, P., (2014) Perluasan Model Kendali Optimal Sistem Pergudangan Dengan Produksi Yang Mengalami Kemerosotan. Proseding UAD, Yogyakarta.

[2]. Affandi, P., (2015). Optimal Inventory Control System with Stochastic Demand. Ethar , Indonesia. 2016(3), 302 – 313.

[3]. Affandi, P., (2015). Optimal Inventory Control Stochastic with Production Deteriorating. IOP Conference Series: Materials Science and Enginering, 300 (2018) 012019 doi:10.1088/1757-899X/300/1/012019.

[4]. Sethi SP, Thompson GL. (2000). Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics: 2nd ed. New York: Springer

[5]. Affandi, P., (2015). Application Optimal Control Theory for Inventory Production System. Proceedings of International Conference on NAMES 2015.

[6]. Affandi, P., (2015). Kendali Optimal Dari Sistem Inventori Dengan Peningkatan dan Penurunan Barang. Jurnal MIPA Unnes, Vol 38, No 1, 79-88.

[7]. Affandi, P., (2016). Perluasan Model Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu. Proseding Seminar Nasional Matematika Udayana, ISSN 2406-9868.

[8]. El-Gohary and A. Elsayed. (2008). Optimal Control of a Multi-Item Inventory Model. International Mathematical Forum, No. 27, 1295 - 1312.

[9]. Hesham K. Alfares (2015). Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items, Vol. 43, No. 5, 899–911.

[10]. Lenard, J. D. and Roy, B. (1995), Multi-item inventory control: A multicriteria view, European Journal of Operational Research 87, pp. 685-692.

[11]. Olsder, G.J., (1994). Mathematical Systems Theory, 1'st Edition, Delft University of Technology.

[12]. Ogata, K. (1990). Modern Control Engineering, 2nd ed. Englewood Cliffs, N. J,: Prentice Hall, Inc.

[13]. Shepley L. Ross. (1984). Differential Equation.3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

[14]. Nador, E. (1996). Inventory systems, John Wiley & Sons Inc., New York.